On se placera dans l'ARQS

Exercices d'application : Modélisation de bobines et condensateurs, circuits du premier ordre à 2 mailles, bilan d'énergie, conditions initiales et d'équilibre, réponse libre d'un circuit RLC parallèle, réseau de Wien,

Culture en sciences physiques : Modélisation de bobines et condensateurs, étincelle de rupture, méthode par *perte de charge*, circuit LC réel, réponse à un signal carré,

Corrigés en TD : Association de condensateurs et bobines, modélisation, étincelle de rupture, bilan d'énergie, conditions initiales, RLC parallèle, stockage d'énergie

Exercice 1 : Vrai ou faux

1. Dans un circuit RC, le condensateur se comporte toujours comme un récepteur électrique.
2. Le temps caractéristique d'un dipôle RC ou RL série est croissant avec sa résistance.
3. Au cours de la décharge d'un condensateur, les électrons se déplacent de l'armature chargée négativement vers l'armature chargée positivement.
4. L'intensité du courant dans un circuit RC est une fonction continue du temps.
5. En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.
6. L'équation de la trajectoire de phase en réponse à un échelon de tension est donnée par $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$: $u_C \mapsto -\frac{1}{\tau}u_C + E$.

Exercice 2 : Stockage d'énergie

Le baptême de l'Ar Vag Tredan a donné lieu à une couverture médiatique dont voici deux extraits.

« Le premier bateau électrique au monde alimenté à 100 % par des supercondensateurs vient d'être baptisé ce mercredi 18 septembre 2013 à Lorient. Ce transbordeur électrique qui fera la navette entre Lorient et Pen-Mané (Locmiquélic) porte bien son nom : Ar Vag Tredan veut dire « bateau électrique » en breton.

La capacité des supercondensateurs est suffisante pour alimenter le bateau sur un aller-retour. La recharge des supercondensateurs se fait pendant le chargement et le déchargement des passagers à terre en seulement 4 minutes. Elle se fait à l'aide d'un connecteur à deux broches à une tension de 400 V.

Le bateau est équipé de 128 supercondensateurs de grande capacité (modules) pour un poids total de 6 tonnes réparti dans les deux coques du catamaran. Celui-ci va pouvoir effectuer chaque jour 28 aller-retours, à raison d'un par demi-heure, pour un trajet de 7 minutes entre Lorient et Locmiquélic, de l'autre côté de la rade. »

`www.supercondensateur.com`

« L'Ar Vag Tredan a commencé jeudi 19 septembre 2013 ses traversées de la rade de Lorient. Ce catamaran électrique pour le transport des passagers fabriqué par le chantier naval STX est unique en son genre. À la différence de ses homologues utilisés dans les ports de la Rochelle ou de Marseille, l'alimentation des deux moteurs de 100 chevaux est assurée par des condensateurs « super capacités » fournis par Bolloré. Le gros avantage de cette technologie par rapport à l'utilisation de batteries est la très grande vitesse de rechargement. »

`www.usinenouvelle.com`

Déterminer la capacité totale des condensateurs et estimer la résistance du circuit de charge. Un cheval vapeur correspond à une puissance de 735 W.

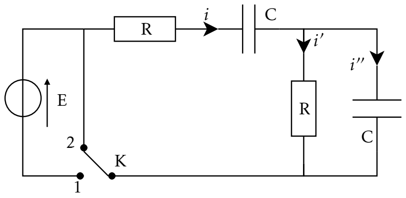
Exercice 3 : Associations de condensateurs et de bobines

1. (a) On considère un dipôle formé de deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 en série. Dériver la loi des mailles pour exprimer la dérivée temporelle de la tension à ses bornes en fonction de l'intensité qui le traverse.
   (b) En déduire que le dipôle peut être modélisé par un condensateur dont on exprimera la capacité C en fonction de C_1 et C_2.
   (c) Montrer de même que l'association parallèle de deux condensateurs constitue un condensateur dont on donnera la capacité en fonction de C_1 et C_2.
   (d) Préciser la répartition des charges dans chacun de ces cas.
2. Mêmes questions pour les associations série et parallèle de deux bobines d'auto-inductances L_1 et L_2.

Exercice 4 : Conditions initiales et d'équilibre

On considère le réseau de la figure ci-dessous. Pour $t < 0$, l'interrupteur K est dans la position 2 et les deux condensateurs (de même capacité C) sont déchargés.

1. À la date $t = 0$, K bascule de la position 2 à la position 1. Déterminer les valeurs des courants i, i' et i'' définis sur la figure à la date $t = 0^+$.
2. Au bout d'un temps T très long, l'interrupteur K bascule à nouveau et revient en position 2. Déterminer les valeurs des courants i, i' et i'' aussitôt après le basculement de K, puis lorsque le régime permanent est atteint.

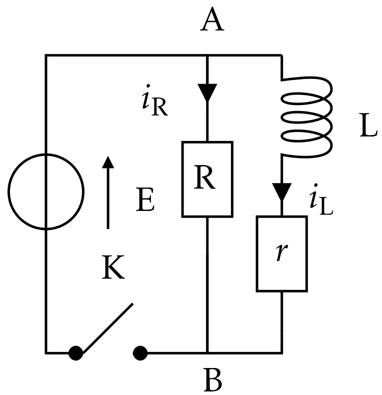


Conditions initiales - Conditions d'équilibre

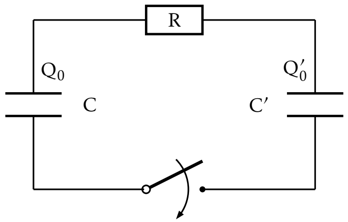
Exercice 5 : Étincelle de rupture

On réalise le circuit de la figure ci-contre dans lequel le générateur a une résistance interne négligeable. Initialement l'interrupteur K est ouvert et aucun courant ne circule dans la bobine.

1. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. Déterminer les courants dans le résistor R (noté i_R) et dans la bobine (i_L).
2. Au bout d'un temps très long, on ouvre l'interrupteur K.
   (a) Déterminer les évolutions temporelles de l'intensité du courant i_L ainsi que de la tension u_{AB}.
   (b) Montrer que pendant un laps de temps assez court, cette dernière peut être supérieure à E si les paramètres sont bien choisis.
   (c) Quelle manifestation connaissez-vous de ce phénomène, nommé « surtension ».
   (d) Que signifie ici « long » ?



Exercice 6 : Bilan d'énergie

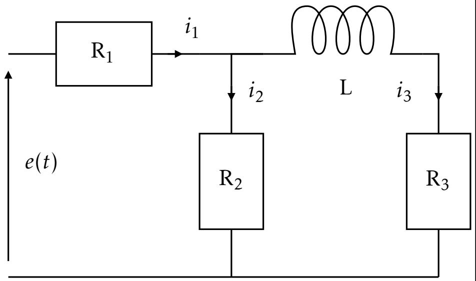


On relie deux condensateurs de capacités respectives C et C', dont l'armature supérieure porte initialement la charge Q_0 et Q'_0, par une résistance R.

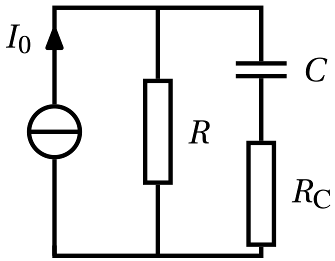
1. Déterminer sans calculs l'état final du système.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i. Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'évolution temporelle des charges de chacun des condensateurs. Retrouver le résultat précédent.
3. Faire un bilan énergétique. On déterminera les expressions (en fonction de $C, C', U_0 = Q_0/C$ et $U'_0 = Q'_0/C'$) des variations de l'énergie électrostatique de chaque condensateur et de l'énergie dissipée par effet Joule et on comparera ces expressions.

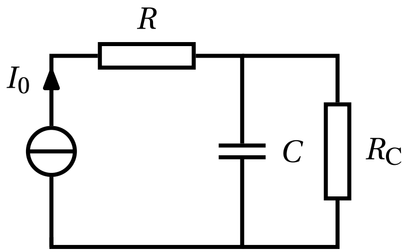
Exercice 7 : Circuits du premier ordre à 2 mailles

La tension $e(t)$ est un échelon variant de O à E à $t = 0$ (initialement, aucun courant ne circule dans le réseau).



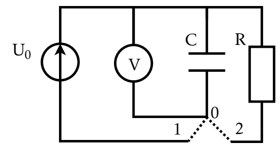
1. Quel est l'état d'équilibre final du système ?
2. Déterminer les évolutions temporelles des intensités des courants $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$. On pourra poser $R' = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$ et $\tau = \frac{L}{R'+R_3}$.
3. Tracer l'allure des courbes représentatives de $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$ dans le cas $R_1 = R_2 = R_3 = R$.
4. Déterminer de deux manières l'énergie emmagasinée dans la bobine à l'issue de la charge.
5. Déterminer la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur dans les deux circuits ci-dessous s'il est initialement déchargé.





Exercice 8 : Mesure d'une résistance par la méthode de « perte de charge »

Pour mesurer une résistance élevée (de l'ordre du mégohm), on réalise le montage électrique représenté sur la figure ci-dessous.

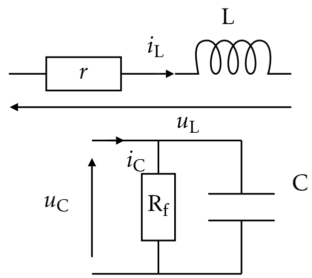


- Dans un premier temps, on abaisse l'interrupteur double dans la position $O \to 1$. Lorsque le condensateur $C = 10\,\mu$F est chargé le voltmètre électronique V indique la tension $U_0 = 6{,}00$ V.
- On ouvre alors l'interrupteur (il n'est ni en position 1 ni en position 2). Au bout du temps $t_1 = 20$ s, le voltmètre V indique la nouvelle tension $U_1 = 5{,}1$ V. Proposer un modèle linéaire du condensateur rendant compte de cette décharge en lui adjoignant une résistance dite « de fuite », notée R_f. Doit-elle être placée en série ou en parallèle ?
- On charge de nouveau le conducteur sous la tension U_0 (interrupteur $0 \to 1$) puis on abaisse brusquement l'interrupteur dans la position $0 \to 2$. Au bout du temps $t_2 = t_1 = 20$ s le voltmètre indique la tension $U_2 = 4{,}6$ V.

1. En déduire les valeurs de la résistance de fuite R_f du condensateur et de la résistance R.
2. Dans la dernière expérience, déterminer à quels instants :
   (a) le condensateur est déchargé de la moitié de son énergie totale,
   (b) la tension à ses bornes est la moitié de la tension initiale.

Exercice 9 : ↯Modélisation de bobines et condensateurs non idéaux

On utilise souvent les modèles présentés ci-dessous de bobines et de condensateurs, en ajoutant une résistance en série (dite *résistance interne*) à la bobine et une résistance en parallèle (dite *résistance de fuite*) en parallèle au condensateur.



1. De quels écarts à l'idéalité ces modifications rendent-elles compte ? Quelles sont les valeurs correspondantes de r et R pour une bobine et un condensateur idéaux ?
2. Déterminer l'équation caractéristique de chacun de ces dipôles. S'agit-il d'une modélisation linéaire ?
3. Typiquement, les valeurs de ces résistances sont de l'ordre de l'ohm pour r et de la centaine de mégohms pour R_f.
   (a) Estimer l'ordre de grandeur de la constante de temps du circuit $r-L$ (resp. $R_f - C$) pour des valeurs usuelles de l'inductance L et de la capacité C.
   (b) En déduire une condition sur les échelles de temps des circuits dans lesquels ces dipôles seront utilisés pour que le modèle idéal soit suffisant.

Correction de l'exercice 1

1. Faux. En réponse à un échelon, le condensateur est un récepteur électrique. En régime libre, le condensateur est un générateur électrique.
2. C'est vrai pour le dipôle RC série pour lequel $\tau = RC$ mais faux pour le dipôle RL pour lequel $\tau = L/R$.
3. Vrai.
4. Faux. À l'instant initial (de la réponse à un échelon ou du régime libre), l'intensité est discontinue.
5. Vrai. L'intensité est nulle quelle que soit la valeur de la tension à ses bornes.
6. Faux. Cette égalité n'est pas homogène.

Correction de l'exercice 2

L'énergie nécessaire pour faire tourner les deux moteurs de puissance 100 ch pendant un aller-retour de 7 min chacun vaut $\mathscr{E} = 2\times(735\times100)\times2\times(7\times60) = 1{,}2\cdot10^8$ J. Les condensateurs sont chargés sous une tension $E = 400$V. L'énergie stockée correspond à $\mathscr{E} = \frac{1}{2}CE^2$, où C est la capacité totale. On en déduit que $C = \frac{2\mathscr{E}}{E^2} = \frac{21{,}2\cdot10^8}{400^2} = 1{,}5\cdot10^3$ F.

La charge se fait en $\Delta t = 4$ min.

On a donc $\tau = RC \simeq \Delta t$, soit $R = \frac{\Delta t}{C} = \frac{4\times60}{1{,}5\cdot10^3} = 160\,\mathrm{m\Omega}$.

Correction de l'exercice 3

Les notations définies sur les figures ci-dessous.

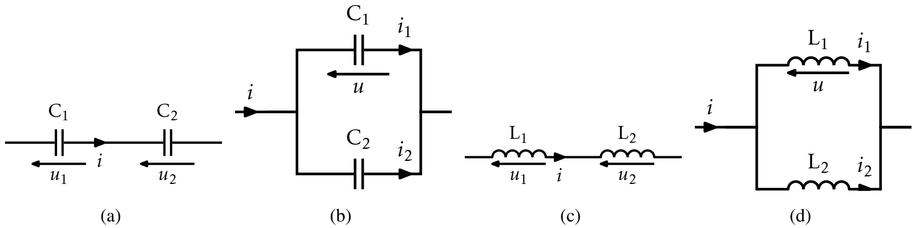


Fig. 1 : Associations série et parallèle de dipôles

1. (a) Pour un condensateur, on a $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. La loi des mailles s'écrit :

$$u = u_1 + u_2 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2}.$$

On a donc : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, avec C tel que $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$, soit $C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$. Le dipôle est donc équivalent à un condensateur de capacité C. Les inverses des capacités s'ajoutent en série.

(b) En parallèle la loi des nœuds s'écrit :

$$i = i_1 + i_2 = C_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + C_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (C_1+C_2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

Cette fois, la capacité équivalente est $C \equiv C_1 + C_2$. Les capacités s'ajoutent en parallèle.

(c) **Association série :** On a $i = \dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}$, on a donc $q_1 = q_2 = q = Cu = C_1u_1 = C_2u_2$.

Association parallèle : On a $q_1 = C_1u$ et $q_2 = C_2u$.

2. Pour une bobine, on a $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Les mêmes manipulations assurent cette fois que les auto-inductances s'ajoutent en série et que leurs inverses s'ajoutent en parallèle.

Correction de l'exercice 4

1. Les conditions sont imposées par la continuité de la charge dans chacun des condensateurs, le condensateur 1 (celui en série avec R) et le condensateur 2 (celui en parallèle avec R). On a donc $q_1(0^+) = q_1(0^-) = 0$. Comme $Ri' = q_2/C$ (loi des mailles), on a $i' = 0$. La loi des mailles assure alors que $E = Ri + q_1/C = Ri$, soit $i = E/R$, la loi des nœuds assure alors que $i'' = E/R$.
2. Les courants sont nuls en $t = T$, on a alors de nouveau $Ri' = q_2/C = 0$. La loi des mailles s'écrit alors $E = 0 + q_1/C$. Après le second basculement, on a $q_1(T+0^+) = q_1(T) = CE$ et $q_2(T+0^+) = q_2(T) = 0$. On en déduit $i = -E/R$, $i' = 0$ et $i'' = -E/R$. Le régime permanent sera identique au régime initial, tous les courants et tensions sont nuls.

Correction de l'exercice 5

1. La continuité du courant dans la bobine assure qu'il a la même valeur en 0^+ qu'avant la fermeture de l'interrupteur. Comme il était nul, on a : $i_L(0^+) = 0$. En revanche sa dérivée n'est pas nulle, puisqu'on doit avoir $L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + ri_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}(0^+) = E$. On a également : $i_R(0^+) = E/R$.
2. (a) Il faut attendre un temps long devant la constante de temps du circuit $r - L$: $\tau_L = L/r$.

(b) Dans l'état final le régime est permanent et la bobine alors équivalente à un fil de résistance r. On a alors $i_L(\infty) = 0$. Après ouverture à l'instant $t_2 \gg \tau$ l'intensité du courant est encore $i_L(t_2^+) = E/r$. Il sera quasiment nul pour $t - t_2 \gg \tau' = L/(R+r)$. L'évolution temporelle de i est donc :

$$i_L(t > t_2) = i_L(\infty) + \big(i_L(0) - i_L(\infty)\big)e^{-(t-t_2)/\tau'} = \frac{E}{r}e^{-(t-t_2)/\tau'}.$$

On a maintenant $i_R = -i_L$ et donc $u_{AB} = Ri_R = -\frac{RE}{r}e^{-(t-t_2)/\tau'}$.

(c) Pour $(t - t_2) \ll \tau'$ $u_{AB} \simeq RE/r$ qui peut être très grand devant E.

(d) Le cas $R/r \to \infty$ correspond au cas où on ouvre l'interrupteur sans placer de résistance de décharge : il apparaît alors une très grande différence de potentiel susceptible de provoquer l'ionisation de l'air[i] au voisinage de l'interrupteur : il se forme une étincelle.

Correction de l'exercice 6

1. On peut déterminer l'état d'équilibre final sans résoudre les équations. Le système est du premier ordre, il va donc évoluer vers un état d'équilibre dans lequel les courants et tensions seront constants[ii]. Les tensions donc

[i] une tension d'environ 30 kV est nécessaire pour provoquer le passage du courant dans 1 cm d'air sec dans les conditions usuelles, c'est la *tension de claquage*.

[ii] Attention, ceci ne sera pas nécessairement le cas pour un système d'ordre 1 avec $\tau \leqslant 0$ (« résistance négative ») ou pour un système d'ordre supérieur 2 sans amortissement.

les charges de chacun des condensateurs seront constantes, donc le courant circulant dans la résistance sera nul : les deux condensateurs seront donc soumis à la même tension u_∞. La zone de l'espace constituée des deux armatures supérieures et du conducteur les reliant est isolée : sa charge est donc conservée : à chaque instant, on a donc $q(t) + q'(t) = Q_0 + Q'_0$. Comme à l'infini : $Q_\infty/C = Q'_\infty/C'$ et $Q_\infty + Q'_\infty = Q_0 + Q'_0$, on obtient :

$$Q_\infty = (Q_0 + Q'_0)C/(C + C') \quad \text{et} \quad Q'_\infty = (Q_0 + Q'_0)C'/(C + C').$$

2. En notant $i(t)$ le courant qui « charge » le condensateur de charge $q(t)$ quand il est positif, on a $i = dq(t)/dt = -dq'(t)/dt$. De plus $Ri(t) = Rdq(t)/dt = q'(t)/C' - q(t)/C$. On peut résoudre cette équation en utilisant le fait que $q'(t) = Q_0 + Q'_0 - q(t)$ mais on peut également la dériver pour obtenir une équation différentielle, toujours du premier degré, sur $i(t) = dq(t)/dt$: $Rdi/dt + (1/C + 1C')i = 0$, soit[iii] :

$$di/dt + i/\tau = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC_{\text{eq}} \text{ et } C_{\text{eq}} = CC'/(C + C').$$

À $t = 0^+$, on a $Ri(0^+) = Q'_0/C' - Q_0/C = u'_0 - u_0$, soit : $i(t) = \frac{(u'_0 - u_0)}{R}\exp(-t/\tau) = \frac{1}{R}\left(\frac{Q'_0}{C'} - \frac{Q_0}{C}\right)e^{-t/\tau}$.

On obtient alors $q(t)$ selon :

$$q(t) - Q_0 = \int_{t'=0}^{t} i(t')dt' = Q_0 + C_{\text{eq}}\left(\frac{Q'_0}{C'} - \frac{Q_0}{C}\right)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$\text{et } q'(t) = Q'_0 + C_{\text{eq}}\left(\frac{Q_0}{C} - \frac{Q'_0}{C'}\right)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

On vérifie la cohérence des limites de ces expressions avec les valeurs déterminées à la question précédente. Bien entendu, on aurait également pu, connaissant q_0, q_∞ et τ écrire directement ces expressions.

3. Initialement, l'énergie emmagasinée dans les condensateurs vaut : $\mathscr{E}_{\text{e}}$ vaut $\mathscr{E}_0 = (CU_0^2 + C'U_0'^2)/2$. À l'équilibre final, $\mathscr{E}_\infty = (C + C')U_\infty^2/2$ avec $U_\infty = (Q_0 + Q'_0)/(C + C')$ la tension commune des deux condensateurs à l'équilibre. On a alors :

$$\mathscr{E}_\infty - \mathscr{E}_0 = -CC'/(C + C')(U_0 - U'_0)^2/2.$$

Cette perte d'énergie correspond à l'énergie dissipée par effet Joule dans le résistor, ce dont on peut se convaincre en calculant $\mathscr{E}_{\text{J}} = \int_{t'=0}^{\infty} Ri(t')^2 dt' = R\int_0^\infty i(0^+)^2 \exp(-2t/\tau)dt' = \tau Ri(0^+)^2/2$.

Correction de l'exercice 7

1. Le circuit est du premier ordre, avec $\tau \geqslant 0$. À l'état final la bobine est équivalente à un fil. Les courants $i_{2\infty}$ et $i_{3\infty}$ s'obtiennent, par exemple, en remplaçant l'association série du générateur de fem $e(t)$ et la résistance R_1 par le générateur de Norton équivalent et utilisant un diviseur de courant :

$$i_{2\infty} = \frac{R_3 E}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \quad \text{et} \quad i_{3\infty} = \frac{R_2 E}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}.$$

Le dernier courant se détermine facilement puisqu'on a :

$$i_{1\infty} = i_{2\infty} + i_{3\infty} = \frac{(R_2 + R_3)E}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}.$$

[iii] On retrouve ici le fait que le courant dans un condensateur peut ne pas être continu : il était nul $t = 0^-$.

2. Il faut établir l'équation différentielle du circuit pour obtenir l'expression de la constante de temps. L'ensemble du générateur de tension idéal et de la résistance R_1 forme un générateur de Thévenin qu'on peut remplacer par le générateur de Norton équivalent, de courant E/R_1 et de résistance R_1. L'adjonction de R_2 en parallèle permet de le remplacer par un générateur de Norton, de même courant et de résistance $R' = R_1R_2/(R_1 + R_2)$, que l'on remplace par le Thévenin équivalent auquel on ajoute en série la résistance R_3. Le montage est donc équivalent (pour ce qui est de la détermination de i_3), à un générateur de Thévenin de force électromotrice $E' = ER'/R_1$ et de résistance $R' + R_3$.

La constante de temps vaut donc : $\tau = L/(R' + R_3)$ et on obtient :

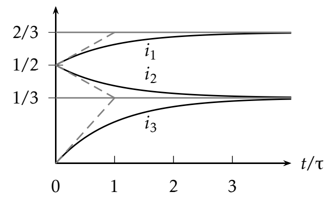
$$i_3(t) = R_2E/(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)\left[1 - \exp(-t/\tau)\right].$$

On détermine la tension u aux bornes de $L + R_3$ selon $u = L\frac{di_3(t)}{dt} + R_3 i_3(t)$. On en déduit

$$i_2(t) = u(t)/R_2 = E/(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)\left[R_3 + R_1R_2/(R_1 + R_2)\exp(-t/\tau)\right]$$

$$\text{puis } i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = E/(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)\left[R_2 + R_3 - R_2^2/(R_1 + R_2)\exp(-t/\tau)\right].$$

On remarque que les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ ne sont pas continus en $t = 0$: seule la bobine peut imposer la continuité de $i_3(t)$.
On a tracé sur la figure ci-contre les variations temporelles des courants (en unités de E/R) en fonction du temps (en unités de τ) pour le cas particulier où les trois résistances sont égales à R.



3. L'énergie $\mathscr{E}_{\text{m}}$ emmagasinée dans la bobine au bout d'un temps très long vaut : $Li_{3\infty}^2/2$, soit :

$$\mathscr{E}_{\text{m}} = L\left(R_2E/(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)\right)^2/2.$$

On peut le vérifier en calculant directement :

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_{\text{m}} &= \int_{t=0}^{\infty} L\frac{di_3(t)}{dt} i_3(t)dt = L\left(\frac{R_2E}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}\right)^2 \int_{t=0}^{\infty}(1 - \exp(-t/\tau))\frac{\exp(-t/\tau)}{\tau}dt \\
&= L\left(\frac{R_2E}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}\right)^2 \int_0^\infty \left(\exp(-t/\tau) - \exp(-2t/\tau)\right)/\tau dt \\
&= L\left(\frac{R_2E}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}\right)^2 (\tau - \tau/2)/\tau = \frac{1}{2}L\left(\frac{R_2E}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}\right)^2.
\end{aligned}$$

4. **circuit de gauche :** l'association parallèle du générateur idéal de courant I_0 et du résistor de résistance R (Norton) est équivalente à l'association série d'un générateur idéal de tension $E \equiv RI_0$ et du même résitor. Ce dernier est alors en série avec le résistor R_C : on obtient donc un générateur dipôle $(R + R_C)C$ chargé par le générateur de tension E. La forme de la solution générale et la condition initiale $u_C(0) = 0$ assurée par la continuité de l'énergie dans le condensateur assure que la solution est :

$$u_C = RI_0\left(1 - e^{-t/(R+R_C)}\right).$$

Remarquons qu'on aurait également pu déterminer la limite de u_C quand $t \to \infty$ en utilisant son modèle d'interrupteur ouvert en régime stationnaire. Le courant dans le résistor R est alors immédiatement I_0, celui dans R_C est nul, on a donc $u_C = u_R = RI_0$.

circuit de droite : la présence du résistor R en série avec le générateur de courant ne change pas sa caractéristique statique $i = I_0$: on peut donc le supprimer du circuit pour l'étude de la tension u_C. La même transformation que dans le cas précédent conduit à un générateur de force électromotrice $R_C I_0$ alimentant un dipôle R_C–C série. On aura donc cette fois :

$$u_C = R_C I_0 \left(1 - e^{-t/(R_C)}\right).$$

Correction de l'exercice 8

La baisse de tension quand le circuit est ouvert est due à la perte de charge dans la résistance de fuite du condensateur.

1. La constante de temps du circuit vaut dans le premier cas : $R_f C$: on a donc $U_1/U_0 = \exp(-t_1/(R_f C))$, soit $R_f C = \frac{t_1}{\ln(U_0/U_1)}$. Dans la deuxième configuration, le condensateur se vide dans la résistance équivalente à $R//R_f$. On a alors $R_f RC/(R + R_F) = \frac{t_2}{\ln(U_0/U_2)}$. On obtient $R_f = 12\,\mathrm{M\Omega}$ et $R = 19\,\mathrm{M\Omega}$.

2. (a) La charge du condensateur vaut $CU_0 e^{-t/\tau}$ avec $\tau = RR_f C/(R + R_F)$. L'énergie est donc $\frac{CU_0^2}{2} e^{-2t/\tau}$ qui est divisée par deux pour $t = \tau \ln(2)/2$. On obtient $t = 26$ s.

   (b) La tension a été divisée par deux pour $t/\tau = \ln(2)$, soit $t = 52$ s.

Correction de l'exercice 9

1.
   - La résistance interne r de la bobine implique qu'il existera une tension aux bornes de la bobine même pour un courant d'intensité constante : cette résistance r représente la résistance du conducteur constituant la bobine, elle est nulle pour une bobine idéale.
   - La résistance R du modèle de condensateur permet à un courant et donc à des charges de passer d'une des bornes du condensateur à l'autre : elle représente les défauts du diélectrique censé isoler les deux armatures. Elle est infinie pour un condensateur idéal.

2. Les lois de Kirchhoff permettent d'écrire :

$$u_L = ri_L + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \text{ et } i_C = \frac{u_C}{R} + C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t},$$

   combinaisons linéaires à coefficients des dérivées successives de la tension et de l'intensité du courant de chaque dipôle : ce sont toujours des modèles linéaires de dipôles.

3.
   - Pour une bobine d'inductance $L = 0,1$ H la constante de temps du circuit $r - L$ sera $\tau_L = L/r \simeq 0,1$s. Pour un condensateur de capacité $C = 1\ \mu$F, la constante de temps sera $\tau_C = RC \simeq 100$ s.
   - Notons τ la constante de temps du circuit auquel ces dipôles sont branchés. Si $\tau \gg \tau_{C,L}$, le dipôle a le temps d'atteindre son régime permanent ($u_{L,C} = R_{L,C} \times i_{L,C}$) avant que le signal a ses bornes ait notablement varié : le caractère inductif ou capacitif ne se manifeste pas. En revanche, si $\tau \ll \tau_{C,L}$ le terme $C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ (resp. $L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$), d'ordre de grandeur Cu_C/τ (resp. Li_L/τ) est très grand devant $u_C/R = Cu_C/\tau_C$ (resp. $ri_L = Li_L/\tau_L$) et la modélisation idéale est suffisante.

Pour une bobine typique, le modèle linéaire sera donc suffisant pour des fréquences très supérieures à la dizaine de Hz. On utilise néanmoins très souvent le modèle tenant compte de la résistance interne car il est très facile d'incorporer la résistance interne aux autres résistances avec laquelle la bobine est en série sans changer la nature du circuit.

Pour un condensateur typique le modèle sans résistance de fuite est tout à fait satisfaisant dès que la fréquence est très supérieure à la dizaine de mHz. On utilise donc le plus souvent le modèle sans résistance de fuite.